РАЗРЕШАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА 2-ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

Е.М. Замараева

Нижегородский Государственный Университет им. Н.И.Лобачевского
пр. Гагарина, 23, 603950, г. Нижний Новгород, Россия elena.zamaraeva@gmail.com

Пусть $E_n^d = \{0, 1, \ldots, n-1\}^d$, $n \geq 2$ и $d \geq 1$. Функция $f : E_n^d \to \{0, 1\}$ называется k-*пороговой* для натурального k, если существуют действительные числа $a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{kd}$ такие, что

$$M_1(f) = \left\{ x \in E_n^d : \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j \leq a_{i0}, \text{ для } i = 1, \ldots, k \right\},$$

где $M_\nu(f) = \{x \in E_n^d : f(x) = \nu\}$. Неравенства $\sum\limits_{j=1}^{d} a_{ij} x_j \leq a_{i0}$ для $i = 1, \ldots, k$ называются *пороговыми* или *определяющими* k-пороговую функцию f.

Обозначим через $\mathfrak{T}(d, n, k)$ класс k-пороговых функций над E_n^d.

Для любой k-пороговой функции f существуют пороговые функции $f_1, \ldots, f_k$ такие, что

$$f(x) = f_1(x) \& \ldots \& f_k(x).$$

Будем говорить, что f *определяется* функциями $f_1, \ldots, f_k$ и $\{f_1, \ldots, f_k\}$ – *определяющее множество* f.

Выпуклую оболочку множества точек $X \subseteq \mathbb{R}^d$ обозначим через $\mathrm{Conv}(X)$. Для функции $f : E_n^d \to \{0, 1\}$ обозначим $P(f) = \mathrm{Conv}(M_1(f))$. Обозначим через $\mathcal{S}(P)$ и $\mathrm{Diam}(P)$ площадь и диаметр выпуклого многоугольника P соответственно.

Пусть $\mathcal{C}$ – класс $\{0, 1\}$-значных функций над E_n^d и $f \in \mathcal{C}$. *Разрешающим множеством* функции f относительно класса $\mathcal{C}$ называется множество $T \subseteq E_n^d$ такое, что никакая другая функция из $\mathcal{C}$ не совпадает с f на всем T. Разрешающее множество T называется *тупиковым*, если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для f. Обозначим через $\sigma(f, \mathcal{C})$ минимальную мощность разрешающего множества f относительно $\mathcal{C}$.

Обозначим также

$$B(E_n^2) = \{x \in E_n^2 : x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \vee x_1 = n-1 \vee x_2 = n-1\}.$$

Пусть $\mathfrak{A}_i(f)$ для $i = 1, 2$ – множество всех множеств из i пороговых неравенств, определяющих f и таких, что прямые, соответствующие коэффициентам пороговых неравенств, пересекаются внутри E_n^2, если $i = 2$. Рассмотрим многоугольник, образованный пересечением $\mathrm{Conv}(E_n^2)$ с полупространствами, заданными неравенствами из некоторого множества $A \in \mathfrak{A}_i$. Через $a_1(A)$ обозначим лексикографически наименьшую вершину многоугольника, смежную с первой пороговой прямой и границей E_n^2, а через $a_2(A)$ – лексикографически наибольшую вершину многоугольника, смежную со второй пороговой прямой и границей E_n^2. Через $o(A)$ обозначим точку пересечения прямых, соответствующих пороговым неравенствам, если $A \in \mathfrak{A}_2$. Введем обозначение:

$$p_{max}(f) = \sup_{A \in \mathfrak{A}_2} \angle a_1(A) o(A) a_2(A).$$

Пусть $f \in \mathfrak{T}(2, n, 2) \setminus \mathfrak{T}(2, n)$, $B(E_n^2) \cap M_1(f) \neq \emptyset$ и $\mathfrak{A}_2(f) \neq \emptyset$. Если $p_{max}(f) < \pi$, то назовем *опорной* такую функцию $f' \in \mathfrak{T}(2, n, 2)$, для которой найдутся пороговые неравенства $A' \in \mathfrak{A}_2(f')$, удовлетворяющие условиям:

1) $f(x) = f'(x)$ для всех $x \in E_n^2 \setminus (o'a_1' \cup o'a_2')$;

2) Для $i = 1,2$ существует $x \in o'a'_i$ такой, что $o'x \cap E_n^2 \subset M_1(f)$ и $xa'_i \cap E_n^2 \subset M_0(f)$, причем $o'x \cap E_n^2 \neq \emptyset, xa'_i \cap E_n^2 \neq \emptyset$.

3) $\angle a'_1 o' a'_2 = p_{max}(f)$.

Пороговые неравенства A' назовем *опорными* для f.

Теорема. *Класс $\mathfrak{T}(2,n,2)$ разбивается на 9 подмножеств по оценке на мощность тупикового разрешающего множества, а именно:*

1) если $f \equiv 1$, то $\sigma(f, \mathfrak{T}(2,n,2)) = 4$;

2) иначе, если $|M_1(f)| \leq 1$, то $\sigma(f, \mathfrak{T}(2,n,2)) = \Omega(n^2)$;

3) иначе, если $f \in \mathfrak{T}(2,n)$, то $\sigma(f, \mathfrak{T}(2,n,2)) = O\left(\min\limits_{A \in \mathfrak{A}_1(f)} l(a_1(A)a_2(A))\right)$;

4) иначе, если $\mathcal{S}(P(f)) = 0$, то $\sigma(f, \mathfrak{T}(2,n,2)) = O(\sqrt{2}n - \mathrm{Diam}(P(f))$;

5) иначе, если $M_1(f) \cap B(E_n^2) = \emptyset$, то

$$\sigma(f, \mathfrak{T}(2,n,2)) = O(\min(\sqrt{2}n - \mathrm{Diam}(P(f)), \mathrm{Diam}(P(f))^2));$$

6) иначе, если существует единственная определяющая пара пороговых функций, то $\sigma(f, \mathfrak{T}(2,n,2)) \leq 9$;

7) иначе, если $M_1(f) \subset B(E_n^2)$, то $\sigma(f, \mathfrak{T}(2,n,2)) = n + 4$;

8) иначе, если $p_{max}(f) < \pi$, то

$$\sigma(f, \mathfrak{T}(2,n,2)) = O\left(\min\left(n, \frac{1}{\pi - p_{max}(f)} + \frac{1}{\max(p_{max}(f) - \arcsin\frac{1}{l_1} - \arcsin\frac{1}{l_2}, 4(l_1+l_2)^2)}\right)\right),$$

где $l_i = l(oa_i)$, $o = o(A), a_1 = a_1(A), a_2 = a_2(A)$ и A – пара опорных неравенств для f;

9) иначе $\sigma(f, \mathfrak{T}(2,n,2)) = O(n)$.

Литература

1. Zamaraeva E. *On teaching sets of k-threshold functions* // http://arxiv.org/abs/1502.04340.